

ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР. ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК (ШЕТЕУЛІ АЙМАҚ) ЕСЕПТІ ФУРЬЕ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

29 қазан 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – параболалық типті теңдеуге жататын жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы шеттік есепті Фурье әдісімен шешу

Негізгі сұрақтар:

- 1 Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп.
- 2 Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп



Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп

Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

мұндағы $u(x, t)$ — температура, $\alpha > 0$ — жылуөткізгіштік коэффициенті.

Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2)$$

Шеттік шарттар (мысалы, Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$



Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы

Бөлшектеу әдісі Шешімді айнымалыларды ажырату әдісі бойынша іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Теңдеуге (1) қойсақ:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

мұндағы λ — бөлшектеу тұрақтысы. **Шекті теңдеулер Кеңістік бөлігі:**

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Бұл классикалық Штурм-Лиувиль теңдеуі. Оның шешімі:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Уақыт бөлігі:

$$T'_n(t) + \alpha^2 \lambda_n T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n t}.$$

Жалпы шешім

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Коэффициенттер B_n бастапқы шарттан табылады:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \implies B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$



Қорытынды Біртекті жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье қатарлары арқылы шешіледі. Алынған шешім:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 t}.$$

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп Бір өлшемді біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4)$$

мұндағы $u(x, t)$ — температура, $\alpha > 0$ — жылуөткізгіштік коэффициенті, $F(x, t)$ — сыртқы жылу көзі немесе біртекті емес бөлік. Бастапқы шарт:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

Шеттік шарттар (Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$



Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы Біртекті емес теңдеуді шешу үшін оны *біртекті және біртекті емес* бөліктерге бөлуге болады:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

мұндағы $v(x, t)$ — біртекті теңдеудің шешімі, $w(x, t)$ — біртекті емес бөлікпен байланысты шешім. **Біртекті бөлік:** Біртекті теңдеуді шешеміз:

$$v_t = \alpha^2 v_{xx}, \quad v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad v(x, 0) = f(x).$$

Бұның шешімі Фурье қатарлары арқылы:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

мұндағы

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$



Біртекті емес бөлік: Біртекті емес бөлік үшін:

$$w_t = \alpha^2 w_{xx} + F(x, t), \quad w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad w(x, 0) = 0.$$

Фурье әдісін қолдансақ:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

онда коэффициенттер $W_n(t)$ келесі интегралдық теңдеуді қанағаттандырады:

$$W'_n(t) + \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 W_n(t) = F_n(t), \quad W_n(0) = 0,$$

мұндағы

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Бұл қарапайым бірінші ретті ЖДТ, шешімі:

$$W_n(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (t-s)} F_n(s) ds.$$

Жалпы шешім

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[B_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (t-s)} F_n(s) ds \right].$$

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье қатарлары және Дюамель принципі арқылы шешіледі.



Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп: Мысал және толық шешімі

Бір өлшемді біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуді қарастырайық:

$$u_t = u_{xx} + \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (7)$$

баастапқы шарт:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

шеттік шарттар (Дирихле типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Шешудің Фурье әдісімен шығару жолы

Біртекті емес бөлік Фурье әдісін қолданамыз. Біртекті емес бөлік:

$$F(x, t) = \sin(\pi x)$$

деп алсақ, шешімді Фурье синус сериясы түрінде іздейміз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin(n\pi x).$$



Фурье коэффициенттерін табу

$$W_n'(t) + (n\pi)^2 W_n(t) = F_n, \quad W_n(0) = 0,$$

мұндағы

$$F_n = 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \sin(n\pi x) dx.$$

Синус функцияларының ортогоналдылығы бойынша:

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

ЖДТ шешімі $n=1$ үшін:

$$W_1'(t) + (\pi)^2 W_1(t) = 1, \quad W_1(0) = 0.$$

Бұл қарапайым бірінші ретті сызықты ОДУ. Ерекше шешімі:

$$W_1(t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - e^{-\pi^2 t}).$$

Барлық басқа $n \geq 2$ үшін $F_n = 0$, сондықтан $W_n(t) = 0$.



Жалпы шешім

Сондықтан толық шешім:

$$u(x, t) = \frac{1 - e^{-\pi^2 t}}{\pi^2} \sin(\pi x).$$

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеудің бастапқы-шеттік есебі Фурье әдісімен шешіледі. Мұндағы маңызды қадамдар:

- Біртекті емес функцияны Фурье синус сериясына жіктеу;
- Әрбір Фурье коэффициентіне қатысты қарапайым бірінші ретті ОДУ шешу;
- Барлық n бойынша қосып, толық шешім алу.



Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.



Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.

Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.



Михлин С.Г.

Курс математической физики. М., 1968.



Владимиров В.С.

Уравнения математической физики. М., 1984.



Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж.



Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.

Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.



Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Уравнения математической физики. М., 2006.



Хомпыш Х.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

